

ভাৰ-বাংলা ব্যাংক - প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০১২  
জাতীয় গণিত অলিম্পিয়াড  
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: সেকেন্ডারি

সময়: ৪ ঘণ্টা

প্রতি সমস্যার মান ১০। সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে। প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। সমস্যার সমাধান মূল উত্তরপত্রে লিখতে হবে। রাফ করার জন্য মূল উত্তরপত্রের পেছন অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও রেজিস্ট্রেশন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।

১. সুব্রত কোরিয়া থেকে রূপন্তিকে প্রতিদিন (২৪ ঘণ্টা পরপর) একটি চিঠি লেখে। তবে রূপন্তি চিঠিগুলো ২৫ ঘণ্টা পরপর পায়। রূপন্তি ২৫ তম দিনে যে চিঠিটি পায় সেটি সুব্রতর পাঠানো কত নম্বর চিঠি?

Subrata writes a letter to Ruponti every day (in successive intervals of 24 hours) from Korea. But Ruponti receives the letters in intervals of 25 hours. What is the number of the letter Ruponti receives on the 25<sup>th</sup> day?

২. তানভীর তাজিংডং পাহাড়ে উঠার সময় মোট ১১ দিন বৃষ্টি হতে দেখেছে। বৃষ্টির দিন হয় সকালে না হয় বিকালে বৃষ্টি হয়, তবে একই দিনে সকালে ও বিকালে বৃষ্টি হয় না। তানভীর মোট ১৬ টি সকাল এবং ১৩ টি বিকাল বৃষ্টি ছাড়া কাটিয়ে থাকে তাহলে তাজিংডং পাহাড়ে উঠতে তার কতদিন সময় লেগেছে?

When Tanvir climbed the Tajindong mountain, on his way to the top he saw it was raining 11 times. At Tajindong, on a rainy day, it rains either in the morning or in the afternoon; but it never rains twice in the same day. On his way, Tanvir spent 16 mornings and 13 afternoons without rain. How many days did it take for Tanvir to climb the Tajindong mountain in total?

৩. ABCDE পঞ্চভুজে ত্রিভুজ ABC, BCD, CDE, DEA এবং EAB এর ক্ষেত্রফল সমান। AC এবং AD সরলরেখাদ্বয় BE কে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BM = EN।

In a given pentagon ABCDE, triangles ABC, BCD, CDE, DEA and EAB all have the same area. The lines AC and AD intersect BE at points M and N. Prove that BM = EN.

৪. সর্বমোট কতগুলো ত্রিভুজ আছে যাদের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্যই পূর্ণসংখ্যা এবং সবচেয়ে বড় বাহুর দৈর্ঘ্য ১০। এমন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সংখ্যাও বের করো।

Find the total number of the triangles whose all the sides are integer and longest side is of 10 in length. If the similar clause is applied for the isosceles triangle then what will be the total number of triangles?

৫. ABC ত্রিভুজে AD এবং CF মধ্যমা G বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। P, AC এর উপর যে কোন বিন্দু। P থেকে অংকিত AD এর সমান্তরাল রেখা BC কে Q বিন্দুতে এবং CF এর সমান্তরাল রেখা AB কে R বিন্দুতে ছেদ করে। QR যদি AD এবং CF কে যথাক্রমে M এবং N বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে দেখাও যে ত্রিভুজ GMN এর ক্ষেত্রফল = (A)/8, যেখানে (A) = AD, CF, PQ, PR দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

In triangle ABC, medians AD and CF intersect at point G. P is an arbitrary point on AC. PQ & PR are parallel to AD & CF respectively. PQ intersects BC at Q and PR intersects AB at R. If QR intersects AD at M & CF at N, then prove that area of triangle GMN is (A)/8 where (A) = area enclosed by PQ, PR, AD, CF

৬. দেখাও যে যেকোন মৌলিক সংখ্যা p জন্য হয় অসীম সংখ্যক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা a আছে অথবা একটিও নেই, যেন  $a^p + 1, 6p$  দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। সেই মৌলিক সংখ্যাগুলোও বের করো যাদের ক্ষেত্রে কোন সমাধান নেই।

Show that for any prime p, there are either infinitely many or no positive integer a, so that  $6p$  divides  $a^p + 1$ . Find all those primes for which there exists no solution.

ক্যাটাগরি: সেকেন্ডারি

সময়: ৪ ঘণ্টা

৭.  $ABC$  সূক্ষকোণী ত্রিভুজে  $\angle A = 60^\circ$ । দেখাও যে  $B$  ও  $C$  বিন্দু হতে তাদের বিপরীত বাহুর উপর আঁকা লম্বের ছেদবিন্দুতে যে কোণগুলো উৎপন্ন হয় তাদের কোন একটির সমদ্বিখন্ডক  $ABC$  ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগামী।

In an acute angled triangle  $ABC$ ,  $\angle A = 60^\circ$ . Prove that the bisector of one of the angles formed by the altitudes drawn from  $B$  and  $C$  passes through the center of the circumcircle of the triangle  $ABC$ .

৮. একটি বৃত্তের অন্তঃস্থ সমকোণী ত্রিভুজ  $ABC$  বৃত্তটিকে তিনটি চাপে বিভক্ত করে।  $A$  কোণটি সমকোণ হওয়ায়  $BC$  চাপটি অর্ধবৃত্ত। তিনটি চাপেই এমনভাবে তিনটি স্পর্শক আঁকা হল যেন  $AB$  ও  $AC$  এর বর্ধিতাংশ দ্বারা কোন স্পর্শকের ছেদকৃত অংশের মধ্যবিন্দু হয় এর স্পর্শবিন্দু। যেমন  $BC$  অংশের জন্য অঙ্কিত উদ্দিষ্ট স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু  $D$  হল  $AB$  ও  $AC$  এর বর্ধিতাংশ দ্বারা ওই স্পর্শকের ছেদকৃত অংশ  $D'D''$  এর মধ্যবিন্দু। অনুরূপভাবে,  $E$ ,  $AC$  চাপের ওপর এবং  $F$ ,  $AB$  চাপের ওপর। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজ  $DEF$  সমবাহু।

The vertices of a right triangle  $ABC$  inscribed in a circle divide the circumference into three arcs. The right angle is at  $A$ , so that the opposite arc  $BC$  is a semicircle while arc  $AB$  and arc  $AC$  are supplementary. To each of the three arcs, we draw a tangent such that its point of tangency is the midpoint of that portion of the tangent intercepted by the extended lines  $AB$  and  $AC$ . More precisely, the point  $D$  on arc  $BC$  is the midpoint of the segment joining the points  $D'$  and  $D''$  where the tangent at  $D$  intersects the extended lines  $AB$  and  $AC$ . Similarly for  $E$  on arc  $AC$  and  $F$  on arc  $AB$ . Prove that triangle  $DEF$  is equilateral.

৯.  $n \times n$  একটি লেখচিত্রের কথা কল্পনা কর। দেখাও যে এখানে তুমি যেকোন  $2n-1$  টি বিন্দু দৈবচয়ন করো না কেন, অবশ্যই সেখানে অন্তত এমন তিনটি বিন্দু থাকবে যারা একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

Consider a  $n \times n$  grid of points. Prove that no matter how we choose  $2n-1$  points from these, there will always be a right triangle with vertices among these  $2n-1$  points.

১০. ত্রিমিনো হলো তিনটি বর্গ দিয়ে তৈরি  $L$  আকৃতি। একটি  $2^k \times 2^k$  দাবাঘর নেওয়া হলো যার একটি বর্গ নাই। প্রমাণ কর যে, বাকি বর্গগুলো দিয়ে ত্রিমিনো তৈরি করা সম্ভব।

A triomino is an  $L$ -shaped pattern made from three unit squares. A  $2^k \times 2^k$  chessboard has one of its squares missing. Show that the remaining board can be covered with triominoes.