



ডাচ-বাংলা ব্যাংক - প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০১২

জাতীয় গণিত অলিম্পিয়াড

আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি



ক্যাটাগরিঃ হায়ার সেকেন্ডারি

সময়ঃ ৪ ঘণ্টা

প্রতি সমস্যার মান ১০। সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে। প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। সমস্যার সমাধান মূল উত্তরপত্রে লিখতে হবে। রায় করার জন্য মূল উত্তরপত্রের পেছন অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও রেজিস্ট্রেশন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।

১. সুব্রত কোরিয়া থেকে রূপন্তিকে প্রতিদিন (24 ঘণ্টা পরপর) একটি চিঠি লেখে। তবে রূপন্তি চিঠিগুলো 25 ঘণ্টা পরপর পায়। রূপন্তি 25 তম দিনে যে চিঠিটি পায় সেটি সুব্রতের পাঠানো কত নম্বর চিঠি?

Subrata writes a letter to Ruponti every day (in successive intervals of 24 hours) from Korea. But Ruponti receives the letters in intervals of 25 hours. What is the number of the letter Ruponti receives on the 25th day?

২. সুপারম্যান একটি হার্ডল দৌড়ে অংশ নিচ্ছে। মোট হার্ডলের সংখ্যা 12। সুপার ম্যান একবারে যে কোন সংখ্যক হার্ডল পাড়ি দিতে পারে। যেমন চাইলে সে প্রথম এক লাফে 7 টি হার্ডল পাড়ি দিবে। তারপর আরেক লাফে 1 টি হার্ডল এবং বাকিগুলো আরেকটি লাফে পাড়ি দিতে পারে। আবার চাইলে সুপারম্যান এক লাফেই সবগুলো হার্ডল পাড়ি দিয়ে দৌড় শেষ করতে পারে। মোট কতভাবে সুপারম্যান দৌড় শেষ করতে পারে?
Superman is taking part in a hurdle race with 12 hurdles. At any stage he can jump across any number of hurdles lying ahead. For example, he can cross all 12 hurdles in one jump or he can cross 7 hurdles in the first jump, 1 in the later and the rest in the third jump. In how many different ways can superman complete the race?

৩. ABCDE পঞ্চভুজে ত্রিভুজ ABC, BCD, CDE, DEA এবং EAB এর ক্ষেত্রফল সমান। AC এবং AD সরলরেখাদ্বয় BE কে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BM = EN।

In a given pentagon ABCDE, triangles ABC, BCD, CDE, DEA and EAB all have the same area. The lines AC and AD intersect BE at points M and N. Prove that BM = EN.

৪. অআআইইইঈঈঈঈঈঈঈ... অনুক্রমটি বিবেচনা করো যেখানে 11টি ঔ এর পরে 12 টি অ, 13টি আ... এভাবে চলতে থাকে। অনুক্রমটির 2012 তম বর্ণটি কি?

Consider the pattern অআআইইইঈঈঈঈঈঈঈ... When the part with 11 ‘ঔ’s end, the pattern continues with 12 ‘অ’s, 13 ‘আ’s and so on. What is the 2012th letter in this pattern?

৫. ABC ত্রিভুজে AD এবং CF মধ্যমা G বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। P, AC এর উপর যে কোন বিন্দু। P থেকে অংকিত AD এর সমান্তরাল রেখা BC কে Q বিন্দুতে এবং CF এর সমান্তরাল রেখা AB কে R বিন্দুতে ছেদ করে। QR যদি AD এবং CF কে যথাক্রমে M এবং N বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে দেখাও যে ত্রিভুজ GMN এর ক্ষেত্রফল = (A)/8, যেখানে (A) = AD, CF, PQ, PR দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

In triangle ABC, medians AD and CF intersect at point G. P is an arbitrary point on AC. PQ & PR are parallel to AD & CF respectively. PQ intersects BC at Q and PR intersects AB at R. If QR intersects AD at M & CF at N, then prove that area of triangle GMN is (A)/8 where (A) = area enclosed by PQ, PR, AD, CF

৬. দেখাও যে যেকোন মৌলিক সংখ্যা p জন্য হয় অসীম সংখ্যক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা a আছে অথবা একটিও নেই, যেন $a^p + 1, 6p$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। সেই মৌলিক সংখ্যাগুলোও বের করো যাদের ক্ষেত্রে কোন সমাধান নেই।

Show that for any prime p, there are either infinitely many or no positive integer a, so that $6p$ divides $a^p + 1$. Find all those primes for which there exists no solution.

৭. ABC সূক্ষকোণী ত্রিভুজে $\angle A = 60^\circ$ । দেখাও যে B ও C বিন্দু হতে তাদের বিপরীত বাহুর উপর আঁকা লম্বের ছেদবিন্দুতে যে কোণগুলো উৎপন্ন হয় তাদের কোন একটির সমদ্বিখন্ডক ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগামী।

In an acute angled triangle ABC, $\angle A = 60^\circ$. Prove that the bisector of one of the angles formed by the altitudes drawn from B and C passes through the center of the circumcircle of the triangle ABC.

৮. $2n + 1$ সংখ্যক পয়সার টেসের মাধ্যমে একটা সিদ্ধান্ত নেওয়া হবে। যদি বেশিরভাগ ক্ষেত্রে হেড আসে তাহলে একটি সিদ্ধান্ত, আর যদি টেল আসে তাহলে অপর সিদ্ধান্তটি নেওয়া হবে। শুরুতে সবগুলো পয়সারই হেড ও টেল পড়ার সম্ভাবনা ছিল সমান সমান। কিন্তু একজন বুদ্ধিমান গণিতবিদ n জোড়া পয়সাকে পরিবর্তন করে এমন n জোড়া পয়সা রেখে দিলেন যেগুলোর কোন একটি কয়েনে হেড ও টেল পড়ার সম্ভাবনা সমান নয়, তবে প্রতিটি জোড়ায়



ডাচ-বাংলা ব্যাংক - প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০১২
জাতীয় গণিত অলিম্পিয়াড
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি



ক্যাটাগরিঃ হায়ার সেকেন্ডারি

সময়ঃ ৪ ঘণ্টা

একটি পয়সায় হেড আসার সম্ভাবনা জোড়ার অন্য পয়সাটিতে টেল আসার সম্ভাবনার সমান। এই পরিবর্তনের কারণে কি কোন একটি সিদ্ধান্তের প্রতি পক্ষপাতিত্ব সৃষ্টি হবে? যুক্তি সহকারে ব্যাখ্যা কর।

A decision making problem will be resolved by tossing $2n + 1$ coins. If Head comes in majority one option will be taken, for majority of tails it'll be the other one. Initially all the coins were fair. A witty mathematician replaced n pairs of fair coins with n pairs of biased coins, but in each pair the probability of obtaining head in one is the same the probability of obtaining tail in the other. Will this cause any favor for any of the options available? Justify with logic.

৯. ত্রিমিনো হলো তিনটি বর্গ দিয়ে তৈরি L আকৃতি। একটি $2^k \times 2^k$ দাবাঘর নেওয়া হলো যার একটি বর্গ নাই। প্রমাণ কর যে বাকি বর্গগুলো দিয়ে ত্রিমিনো তৈরি করা সম্ভব।

A triomino is an L -shaped pattern made from three unit squares. A $2^k \times 2^k$ chessboard has one of its squares missing. Show that the remaining board can be covered with triominoes.

১০. একটি ফাংশন $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ বিবেচনা করো। এটা নিচের সম্পর্কগুলো মেনে চলে-

(i) $f(0) = 0$; (ii) $f(np) = f(n)$; (iii) $f(n) = n + f\left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor\right)$ যখন p দ্বারা n নিঃশেষে বিভাজ্য নয়।

এখানে $p > 1$ একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। \mathbb{N}_0 সকল অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট। $\lfloor x \rfloor$ দ্বারা x এর সমান কিংবা তার চেয়ে ছোট সবচেয়ে বড় সংখ্যাটি নির্দেশ করা হচ্ছে। $0 \leq n \leq p^k$ এর জন্য $f(n)$ এর বৃহত্তম মানকে a_k দ্বারা প্রকাশ করা হয়। a_k নির্ণয় কর।

Consider a function $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ following the relations:

(i) $f(0) = 0$; (ii) $f(np) = f(n)$; (iii) $f(n) = n + f\left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor\right)$ when n is not divisible by p .

Here $p > 1$ is a positive integer, \mathbb{N}_0 is the set of all nonnegative integers and $\lfloor x \rfloor$ is the largest integer smaller or equal to x . Let, a_k be the maximum value of $f(n)$ for $0 \leq n \leq p^k$. Find a_k .