

ডাচ বাংলা ব্যাংক-প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০০৯
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজনে : বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি - হায়ার সেকেন্ডারি

সময় - ৪ ঘণ্টা

Category – Higher Secondary

Total Time- 4 Hours

পরামর্শ - শুরু দিকের সমস্যাগুলো শেষের দিকের সমস্যার তুলনায় অপেক্ষাকৃত সহজ। কাজে শুরুতে প্রথম দিককার সমস্যাগুলো করা ভাল। সকল প্রশ্নের মান সমান।

Suggestions: Earlier problems are intended to be easier than later problems; try the beginning problems first; all problems have equal weight

- একটি ঘরে জন রাজনীতিবিদ বসে আছেন। এদের প্রত্যেকে হয় সৎ অথবা দুর্নীতিবাজ। তবে, কমপক্ষে একজন সৎ। আবার যেকোন দুইজনের মধ্যে একজন অসৎ। রাজনীতিবিদদের মধ্যে কতোজন সৎ আর কতোজন দুর্নীতিবাজ?
300 politicians are sitting in a room. Each one is corrupted or honest. At least one is honest. Given any two politicians, at least one is corrupt. How many are corrupted and how many are honest?
- পূর্ণসংখ্যায় সমাধান নির্ণয় কর $\frac{x^2}{2} + \frac{5}{y} = 7$
Find all integral solutions of the equation $\frac{x^2}{2} + \frac{5}{y} = 7$
- ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক, B বিন্দু থেকে AC বাহুর উপর অংকিত লম্ব এবং AB বাহুর লম্বদ্বিখন্ডক একইবিন্দুতে ছেদ করে। $\angle BAC$ -এর মান নির্ণয় করো।
Triangle ABC is acute with the property that the bisector of $\angle BAC$ and the altitude from B to side AC and the perpendicular bisector of AB intersect at one point. Determine the angle $\angle BAC$.
- ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ এবং M ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র। ত্রিভুজের অভ্যন্তরে P বিন্দু নির্ণয় করো যা নিচের শর্তাবলীকে পূরণ করে
 $1 \leq \frac{\angle APB}{\angle ACB} \leq 2, 1 \leq \frac{\angle BPC}{\angle BAC} \leq 2, 1 \leq \frac{\angle CPA}{\angle CBA} \leq 2$
Triangle ABC is acute and M is its circumcenter. Determine what points P inside the triangle satisfy
 $1 \leq \frac{\angle APB}{\angle ACB} \leq 2, 1 \leq \frac{\angle BPC}{\angle BAC} \leq 2, 1 \leq \frac{\angle CPA}{\angle CBA} \leq 2$
- ABC ত্রিভুজে $\angle A = 90^\circ$ । BC এর মধ্যবিন্দু M। AC এর উপর D বিন্দু এমনভাবে নেওয়া হল যাতে $AD = AM$ হয়। AMC ও BDC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত দুইটি পরস্পরকে C ও P বিন্দুতে ছেদ করে। ($\angle ACB$ ও $\angle PCB$) –এর অনুপাত বের করো।
In triangle ABC, $\angle A = 90^\circ$. M is the midpoint of BC. Choose D on AC such that $AD = AM$. The circumcircles of triangles AMC and BDC intersect at C and at a point P. What is the ratio of angles: $(\angle ACB)/(\angle PCB)$?
- 40 জন মুভার্স {গণিত অলিম্পিয়াড স্বেচ্ছাসেবক} বৃত্তাকারে বসে আছে। মুনির হাসান তাদের মধ্য থেকে 3জনকে দৈবচয়নে (নির্বিচার) নির্বাচিত করেছে পুরস্কার বিতরণী অনুষ্ঠানে সহায়তা করার জন্য। কতোভাবে স্বেচ্ছাসেবকদের বাছাই করা যাবে, যাতে ঐ 3জনের মধ্যে কমপক্ষে দুইজন বাছাই-এর আগে পাশাপাশি বসেছিল?

Forty MOVERS (Mathematical Olympiad Volunteers) are sitting in a circle. Munir Hasan randomly chooses 3 volunteers to help in the awards ceremony. In how many ways can the volunteers be chosen such that at least 2 of the volunteers were sitting next to each other before being chosen?

7. 1 ও 0 পরপর থাকে এরকম সিকোয়েন্সের উদাহরণ হলো $N = 1010101$ এবং এখানে N -এর বৈশিষ্ট্য হলো $99N = 99999999$ । এখন, কতোগুলো মৌলিক সংখ্যা আছে যেগুলোকে এরকম 1 ও 0 -এর পরপর সিকোয়েন্স আকারে লেখা যাবে যেখানে প্রথম ও শেষ অঙ্ক হবে 1?

How many positive prime numbers can be written as an alternating sequence of 1's and 0's where the first and last digit is 1? An alternating sequence of 1's and 0's is for example: $N = 1010101$, and has the property that $99N = 99999999$.

8. A ক্ষেত্রটি x অক্ষ, $y = \frac{x}{2}$ সরলরেখা ও $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ। B ক্ষেত্রটি y -অক্ষ, $y = mx$ সরলরেখা ও $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ। m -এর কোন মানের জন্য A ও B -এর ক্ষেত্রফল সমান হবে?

The region A is bounded by the x -axis, the line $y = \frac{x}{2}$, and the ellipse $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. The region B is bounded by the y -axis, the line $y = mx$, and the ellipse $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Find m such that area of region A is the equal to the area of region B.

9. একটি $n \times n$ দাবাবোর্ডের প্রতিটি বর্গ হয় লাল অথবা সবুজ। বোর্ডটিকে এমনভাবে রং করা হয়েছে যে, যেকোন 2×2 ব্লকের সংলগ্ন বর্গের মধ্যে ঠিক 2টি সবুজ ও ঠিক 2টি লাল বর্গ রয়েছে। কতোভাবে এই দাবা বোর্ডটিকে রং করা যাবে। লক্ষ্য করো যে, 2×2 দাবাবোর্ডের জন্য সংখ্যাটি হচ্ছে 6 এবং 3×3 বোর্ডের বেলায় মোট উপায় হলো 14 যা 2^3 থেকে বড়।

Problem 9: Each square of an $n \times n$ chessboard is either red or green. The board is colored such that in any 2×2 block of adjacent squares there are exactly 2 green squares and 2 red squares. How many ways can the chessboard be colored in this way? Note the number of ways for a 2×2 chessboard is 6 and the number of ways for a 3×3 chessboard is 14 which is bigger than 2^3 .

10. সূক্ষ্মকোণী ABC ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র H। ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের কেন্দ্র K এবং ব্যাসার্ধ $R = 1$ । HK এবং BC রেখার ছেদবিন্দু D। দেওয়া আছে, $DK \cdot (DK - DH) = 1$ । ABHC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

Problem 10: H is the orthocenter of acute triangle ABC. The triangle is inscribed in a circle with center K with radius $R = 1$. Let D is the intersection of the lines passing through HK and BC. Also, $DK \cdot (DK - DH) = 1$. Find the area of the region ABHC.

11. S এর মান নির্ণয় করো যেখানে

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 n}{3^m (n3^m + m3^n)}$$

Find S where

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 n}{3^m (n3^m + m3^n)}$$