

ক্যাটাগরি: সেকেন্ডারি (নবম- দশম- এসএসসি)  
Category: Secondary (ix – x)

সময়: ৪ ঘণ্টা  
Time: 4 Hours

মূল উত্তরপত্রে সমাধান লিখতে হবে। প্রশ্নপত্রের উভয় পাশেই ছাপা রয়েছে। প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত সকল সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। প্রতিটি প্রশ্নের মান সমান। প্রশ্নগুলো কাঠিন্যের ক্রমবর্ধমান ক্রমে সাজানো আছে। সমস্যার সমাধানে আংশিক নম্বর প্রদান প্রযোজ্য।

১. মাহবুবের পার্টিতে ২০১১ জন গণিতবিদ উপস্থিত হলো। মাহবুব (যে নিজেও একজন গণিতবিদ) বাকি সকল গণিতবিদকে চেনে। পরস্পর অপরিচিত দুইজন গণিতবিদের যদি একজনসাধারণ বন্ধু থাকে (অর্থাৎ দুজনই যদি পৃথক পৃথকভাবে একজনের বন্ধু হয়) তাহলে সেই সাধারণ বন্ধুটি সেই অপরিচিত দুইজনকে পরিচয় করিয়ে দিবে এবং শেষে সেই দুজন পরস্পরের বন্ধু হয়ে যাবে। পার্টি শেষে এমন কয় জোড়া গণিতবিদ থাকবে যার একজনঅপরজনকে চেনে না?

There are 2011 mathematicians in a party. It is known that, Mahbub, the host of the party (who is also a mathematician) knows all other mathematicians. Two mutually unacquainted mathematicians will become friend of each other eventually after the party if they have a common friend/acquaintance (who will introduce them to each other of course). After the end of the party how many pairs of mathematicians will be left who are not yet introduced to each other?

২. একটি দাবা টুর্নামেন্টের প্রথম রাউন্ডে প্রত্যেক প্রতিযোগী অবশিষ্ট প্রত্যেক প্রতিযোগীর সাথে একবার করে খেলে। একটি ম্যাচে জয় লাভ করা, ড্র করা অথবা হারার জন্য প্রত্যেক খেলোয়াড় যথাক্রমে ৩, ০ অথবা -১ পয়েন্ট করে পায়। প্রথম রাউন্ড শেষে সকল প্রতিযোগীর পয়েন্টের সমষ্টি ২১ হতে পারে কি? তোমার যুক্তি দেখাও।

In the first round of a chess tournament, each player plays against every other player exactly once. A player gets 3, 0 or -1 points respectively for winning, drawing or losing a match. After the end of the first round, is it possible that the sum of the scores of all the players is 21? State your answer with logic.

৩. ABC ত্রিভুজের অন্তঃবৃত্ত AB, BC এবং CA বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করে। দেখাও যে  $\triangle ABC$  ও  $\triangle DEF$  সদৃশকোণী হলে  $\triangle ABC$  সমাবাহু হবে।

In triangle ABC, the incircle touches AB, BC and CA at D, E and F. Show that if  $\triangle ABC$  and  $\triangle DEF$  are similar then  $\triangle ABC$  is equilateral.

৪. ABCD আয়তক্ষেত্রে BC বাহুর মধ্যবিন্দু E। BE এর উপর একটি বিন্দু X বেছে নেয়া হল। DX বর্ধিত AB কে P বিন্দুতে ছেদ করে। X এর যে অবস্থানের জন্য  $\triangle BPX$  ও  $\triangle DXC$  এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সর্বোচ্চ হয় তা প্রমাণসহ নির্ণয় কর।

E is the midpoint of side BC of rectangle ABCD. A point X is chosen on BE. DX meets extended AB at P. Find the position of X so that the sum of the areas of  $\triangle BPX$  and  $\triangle DXC$  is maximum with proof.

৫. একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ ABC এ  $\angle A = 90^\circ$ । A বিন্দুতে ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের স্পর্শক BC কে M বিন্দুতে ছেদ করে। ত্রিভুজটির অন্তঃবৃত্ত AC কে S ও AB কে R বিন্দুতে স্পর্শ করে। RS ও BC পরস্পরকে N বিন্দুতে ছেদ করে এবং AM ও SR পরস্পরকে U বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে UMN একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

In a scalene triangle ABC with  $\angle A = 90^\circ$ . The tangent line at A to its circumcircle meets line BC at M and the incircle touches AC at S and AB at R. The lines RS and BC intersect at N while the lines AM and SR intersect at U. Prove that the triangle UMN is isosceles.

৬.  $p$  একটি মৌলিক সংখ্যা। ১ থেকে  $p$  পর্যন্ত পূর্ণ সংখ্যাগুলোর যোগফল  $p$  এবং তার থেকে ছোট সব মৌলিক সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য।  
প্রমাণসহ  $p$  এর সম্ভাব্য মানগুলো বের করো।  
 $p$  is a prime and sum of the numbers from 1 to  $p$  is divisible by all primes less or equal to  $p$ . Find the value of  $p$  with proof.

৭. একটি গ্রুপে  $n > 1$  সংখ্যক মানুষ আছেন। এই গ্রুপের যেকোন দুজন মানুষ পরস্পরের বন্ধু অথবা শত্রু। আবার যেকোন বন্ধুর বন্ধুও বন্ধু আর যেকোন শত্রুর শত্রুও বন্ধু। যদি ঐ গ্রুপে থাকা  $A$  এবং  $B$  পরস্পরের বন্ধু কিংবা শত্রু হয় তাহলে সেটিকে ১টি বন্ধুত্ব কিংবা ১টি শত্রুতা বলা হবে। দেখা গেল ঐ গ্রুপে বন্ধুত্বের সংখ্যা শত্রুতার সংখ্যার সমান।  $n$  এর সকল সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।  
Consider a group of  $n > 1$  people. Any two people of this group are related by mutual friendship or mutual enmity. Any friend of a friend and any enemy of an enemy is a friend. If  $A$  and  $B$  are friends/enemies then we count it as 1 friendship/enmity. It is observed that the number of friendships and number of enmities are equal in the group. Find all possible values of  $n$ .

৮. ভাস্করাচার্য এক বিদ্যুটে ধরনের অধ্যয়ন সংগঠন তৈরি করেছেন। ভাস্করাচার্য ছাড়া ঐ সংগঠনের সকল সদস্য ঠিক একজন শিক্ষকের কাছেই বিদ্যা লাভ করেন, যদিও শিক্ষকের শিক্ষককেও শিক্ষক হিসেবে সম্মান করা হয়। ভাস্করাচার্য নিজে ঐ সংগঠনের প্রধান হিসেবে কারো কাছ থেকে বিদ্যা লাভ করেন না। ঐ সংগঠনের দুজন সদস্য পরস্পরের শিক্ষক হতে পারেন না। সংগঠনটির নিয়ম হল এখানে সবাই জোড়ায় জোড়ায় কাজ করবে, প্রত্যেক জোড়ায় একজন ছাত্রের সাথে তাঁকে বিদ্যা দানকারী শিক্ষক থাকবেন। যদি এভাবে জোড়ায় জোড়ায় কাজ করা সম্ভব হয়, সেটি কি ঠিক একভাবেই সম্ভব? তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দেখাও।  
Bhaskaracharya has set up a strange study group. Any member of that group has exactly one immediate teacher (the teacher who teaches him) except for Bhaskaracharya himself, although teacher of teacher is also respected as a teacher. As the chancellor of the group, Bhaskaracharya is not taught by anybody. No two members of that group can be teachers of each other. The study group operates in a pairs where each pair consists of one member and his immediate teacher. If such a pairing is possible, is it unique? Justify your answer.

৯. দেখাও যে  $100\sqrt{3+\sqrt{2}} + 100\sqrt{3-\sqrt{2}}$  সংখ্যাটি অমূলদ।  
Prove that  $100\sqrt{3+\sqrt{2}} + 100\sqrt{3-\sqrt{2}}$  is irrational.

১০. একই সংখ্যাকে পাশাপাশি দুবার লিখলে তাকে ঐ সংখ্যার পুনরাবৃত্তি বলা হয়। যেমন ১২৩ এর পুনরাবৃত্তি হল ১২৩১২৩। এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা নির্ণয় কর (যদি থাকে) যেন তার পুনরাবৃত্তি একটি পূর্ণবর্গ হয়।  
The repeat of a natural number is obtained by writing it twice in a row (for example, the repeat of 123 is 123123). Find a positive integer (if any) whose repeat is a perfect square.